Fiche exercices sur les systèmes et les matrices

EXERCICE 1 : On donne les matrices $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ c & -3 \end{pmatrix}$ **et** $B=\begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **.**

Déterminer a , b et c tel que $2A-3B=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & -12 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 : On donne les matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer à la main la matrice 3A-4B .

b) Calculer à la main A² et B² . Que remarque-t-on ?

c) Calculer à la main AB puis BA.

EXERCICE 3 : On donne les matrices $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ -3 & b \end{pmatrix}$ **et** $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ c & 2 \end{pmatrix}$ **.**

Déterminer a , b et c tel que $A\times B=\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$

EXERCICE 4 : On donne les matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & c \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer a et b pour avoir l'égalité $A\times B=B\times A$

EXERCICE 5 : On donne la matrice $A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ x & -6 \end{pmatrix}$ où x désigne un nombre .

1) a) Déterminer par le calcul la valeur de x pour laquelle $A\times A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   b) Dans ce cas peut-on calculer A^{-1} ?

2) a) Déterminer par le calcul la valeur de x pour laquelle $A\times A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   b) Dans ce cas, exprimer A^{-1} avec la calculatrice.

   c) Que remarque t-on ? en déduire A^{2012} et A^{2013}

3) Déterminer par le calcul la valeur de x pour laquelle $A\times A=\begin{pmatrix} 2012 & 0 \\ 0 & 2012 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 6 : On donne le système suivant (S) $\begin{cases} -x+2y-3z=-12 \\ 2x+3y+z=7 \\ 3x-y+2z=17 \end{cases}$

1) Ecrire le système (S) sous la forme AX=B où les matrices A , X et B sont à préciser .
2) résoudre le système (S) en indiquant la méthode utilisée .

<u>EXERCICE 7</u> : On donne la matrice 2x2 suivante : $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

a) Exprimer A^2 avec la calculatrice , en déduire A^2 en fonction de A

b) Même question avec A^3.

c) Exprimer A^n en fonction de n et exprimer A^n en fonction de A

<u>EXERCICE 8</u> : On donne la matrice 3x3 suivante : $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Exprimer A^{-1} avec la calculatrice.

b) Exprimer A^2 et $\left(A^2\right)^{-1}$ avec la calculatrice.

c) Exprimer A^3 et $\left(A^3\right)^{-1}$ avec la calculatrice.

d) Exprimer A^4 et $\left(A^4\right)^{-1}$ avec la calculatrice.

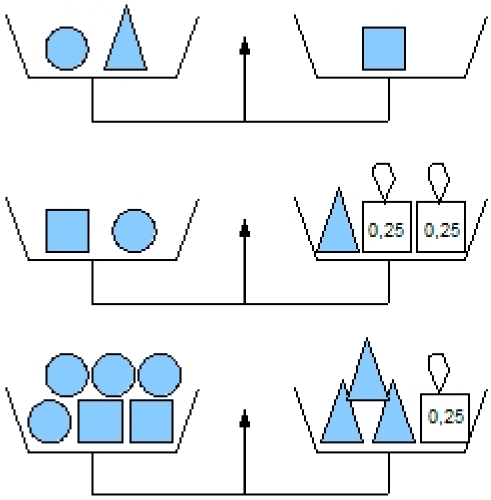
e) Faire une conjecture sur l'expression de A^n en fonction de n et de $\left(A^n\right)^{-1}$ en fonction de n.

f) Vérifier votre conjecture pour $n = 10$.

<u>EXERCICE 9</u> :

une personne possède 12 objets , 4 ronds , 4 carrés et 4 triangulaires , une balance et 2 masses de 0,25 kg .
(*les objets de même forme ont le même poids*)

Elle réussie à mettre la balance en équilibre trois fois, comme le montre la figure ci-contre



1) Déterminer le poids de chaque objet .

2) Pouvait-on trouver des pesées plus simples pour trouver le poids de chaque objet ?
Si oui , donner ces pesées .

<u>EXERCICE 10</u> :

Résoudre, si possible, les systèmes suivants en utilisant des matrices et en indiquant la méthode utilisée.

1) $\begin{cases} x+2y+z=0\\ 2x+4y+z=-2\\ x-6y+2z=-2\end{cases}$

2) $\begin{cases} x+2y+z=0\\ 2x+4y+z=-2\\ x-6y+2z=-4\end{cases}$

<u>EXERCICE 11 (difficile)</u> :

On donne les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}$

Déterminer a , b , c , d , e et f sachant que $A\times B=\begin{pmatrix}7 & -7\\ 5 & -5\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

Corrigé

EXERCICE 1 : On donne les matrices $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ c & -3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $2A-3B=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & -12 \end{pmatrix}$

comme $2A-3B=2\begin{pmatrix} a & 2 \\ c & -3 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a-3 & 4-3b \\ 2c+3 & -12 \end{pmatrix}$

on a donc le système $\begin{cases} 2a-3=7 \\ 4-3b=1 \\ 2c+3=-1 \\ -12=-12 \end{cases}$; $\begin{cases} 2a=10 \\ -3b=-3 \\ 2c=-4 \\ -12=-12 \end{cases}$; $\begin{cases} a=5 \\ b=1 \\ c=-2 \\ -12=-12 \end{cases}$

d'où $a=5$; $b=1$ et $c=-2$

<u>vérification</u> : $2A-3B=2\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10-3 & 4-3 \\ -4+3 & -6-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & -12 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 : On donne les matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) . $3A-4B=3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times1\text{-}4\times3 & 3\times3\text{-}4\times6 \\ 3\times2\text{-}4\times(-1) & 3\times6\text{-}4\times(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\text{-}12 & 9\text{-}24 \\ 6+4 & 18+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & -13 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$

b) Calculer à la main A² et B² . Que remarque-t-on ?

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+3\times2 & 1\times3+3\times6 \\ 2\times1+6\times2 & 2\times3+6\times6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+6 & 3+18 \\ 2+12 & 6+12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times3+6\times(\text{-}1) & 3\times6+6\times(\text{-}2) \\ \text{-}1\times3\text{-}2\times(\text{-}1) & \text{-}1\times6\text{-}2\times(\text{-}2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9-6 & 18-12 \\ -3+2 & -6+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

On remarque que $A^2=7\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=7A$ et que $B^2=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=B$

c) Calculer à la main AB puis BA.

$$A\times B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times3+3\times(\text{-}1) & 1\times6+3\times(\text{-}2) \\ 2\times3+6\times(\text{-}1) & 2\times6+6\times(\text{-}2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-3 & 6-6 \\ 6-6 & 12-12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B\times A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times1+6\times2 & 3\times3+6\times6 \\ \text{-}1\times1\text{-}2\times2 & \text{-}1\times3\text{-}2\times6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+12 & 9+36 \\ -1-4 & -3-12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 45 \\ -5 & -15 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 3 : On donne les matrices $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ -3 & b \end{pmatrix}$ **et** $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ c & 2 \end{pmatrix}$ **et** $A\times B=\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$

$A\times B=\begin{pmatrix} a & 2 \\ -3 & b \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ c & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2c & -a+4 \\ -3+bc & 3+2b \end{pmatrix}$ et $A\times B=\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$

on a donc le système $\begin{cases} a+2c=8 \\ -a+4=2 \\ -3+bc=9 \\ 3+2b=11 \end{cases}$; $\begin{cases} a+2c=8 \\ -a=-2 \\ -3+bc=9 \\ 2b=8 \end{cases}$; $\begin{cases} a+2c=8 \\ a=2 \\ -3+bc=9 \\ b=4 \end{cases}$; $\begin{cases} 2c=6 \\ a=2 \\ 4c=12 \\ b=4 \end{cases}$; $\begin{cases} c=3 \\ a=2 \\ c=3 \\ b=4 \end{cases}$

d'où $a=2$; $b=4$ et $c=3$

<u>vérification :</u> $A\times B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+6 & -2+4 \\ -3+12 & 3+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$

EXERCICE 4 : On donne les matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 4 & c \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer *a* et *b* pour avoir l'égalité $A\times B=B\times A$

$A\times B=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 4 & c \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4a-2 & ac+1 \\ 0 & 2c+4 \end{pmatrix}$ et $B\times A=\begin{pmatrix} 4 & c \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4a+2c & 4+4c \\ -2a+2 & 2 \end{pmatrix}$

on a donc le système $\begin{cases} 4a-2=4a+2c \\ ac+1=4+4c \\ 0=-2a+2 \\ 2c+4=2 \end{cases}$; $\begin{cases} -2=2c \\ ac=3+4c \\ 2a=2 \\ 2c=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} -1=c \\ ac=3+4c \\ a=1 \\ c=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} -1=c \\ -1=3-4 \\ a=1 \\ c=-1 \end{cases}$

donc a =1 et c =-1 d'où $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Vérification</u> : $A\times B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B\times A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

EXERCICE 5 : On donne la matrice $A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ x & -6 \end{pmatrix}$ où *x* désigne un nombre .

1) a) $A\times A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ x & -6 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ x & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 36-4x & 0 \\ 0 & -4x+36 \end{pmatrix}$; si $A\times A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

alors . $36-4x=0$; $36=4x$; $x=9$ donc $A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$

b) pour $A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$ on a $6(-6)=-36$ et $9(-4)=-36$ donc on ne peut pas calculer A^{-1}

2) a) $A\times A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ x & -6 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ x & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 36-4x & 0 \\ 0 & -4x+36 \end{pmatrix}$; si $A\times A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

alors . $36-4x=-1$; $35=4x$; $x=\frac{35}{4}=8{,}75$ donc $A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 8{,}75 & -6 \end{pmatrix}$

b) pour $A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 8{,}75 & -6 \end{pmatrix}$ on a $6(-6)=-36$ et $8{,}75(-4)=-35$ donc on peut calculer A^{-1}

on obtient $A^{-1}=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 8{,}75 & -6\end{pmatrix}$

c) on remarque que $A^{-1}=A$ et donc que $A^2=I$

d'où $A^{2012}=\left(A^2\right)^{1006}=I^{1006}=I$ et $A^{2013}=AA^{2012}=A\left(A^2\right)^{1006}=AI^{1006}=AI=A$

4) a) $A\times A=\begin{pmatrix}6 & -4\\ x & -6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6 & -4\\ x & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36-4x & 0\\ 0 & -4x+36\end{pmatrix}$; si $A\times A=\begin{pmatrix}2012 & 0\\ 0 & 2012\end{pmatrix}$

alors . $36-4x=2012$; $-1976=4x$; $x=-494$ donc $A=\begin{pmatrix}6 & -4\\ -494 & -6\end{pmatrix}$

EXERCICE 6 : On donne le système suivant (S) $\begin{cases}-x+2y-3z=-12\\ 2x+3y+z=7\\ 3x-y+2z=17\end{cases}$

1) pour $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-12\\ 7\\ 17\end{pmatrix}$ on peut écrire le système (S) sous la forme $AX=B$

<u>2) résoudre ce (S) en indiquant la méthode utilisée .</u>

Comme $AX=B$ alors $A^{-1}AX=A^{-1}B$ d'où $X=A^{-1}B$

On obtient $A^{-1}=\begin{pmatrix}7/24 & -1/24 & 11/24\\ -1/24 & 7/24 & -5/24\\ -11/24 & 5/24 & -7/24\end{pmatrix}$ et $A^{-1}B=\begin{pmatrix}7/24\\ -1/24\\ -5/24\end{pmatrix}$ donc $S=\left\{\left(\frac{7}{24};\frac{-1}{24};\frac{-5}{24}\right)\right\}$

<u>EXERCICE 7</u> : On donne la matrice 2x2 suivante : $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

a) $A^2=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 6 & 6\end{pmatrix}$ d'où $A^2=3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=3A$

b) $A^3=\begin{pmatrix}9 & 9\\ 18 & 18\end{pmatrix}$ d'où $A^3=9\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=9A=3^2A$

c) $A^n=\begin{pmatrix}3^{n-1} & 3^{n-1}\\ 2\times3^{n-1} & 2\times3^{n-1}\end{pmatrix}$ d'où $A^n=3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=3^{n-1}A$

<u>EXERCICE 8</u> : On donne la matrice 3x3 suivante : $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ b) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\left(A^2\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & 8\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

c) $A^3=\begin{pmatrix}1 & 6 & 18\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\left(A^3\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -6 & 18\\ 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

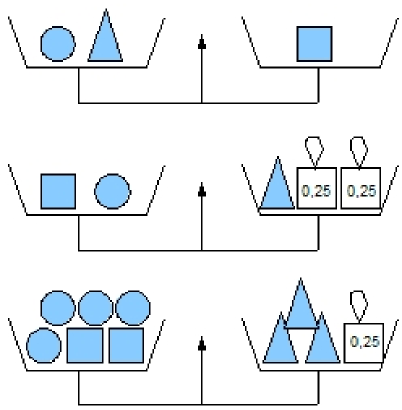
d) $A^4=\begin{pmatrix}1 & 8 & 32\\ 0 & 1 & 8\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\left(A^4\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -8 & 32\\ 0 & 1 & -8\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

e) il semble que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\left(A^4\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2n & 2n^2 \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) pour $n = 10$ on a $2n = 2\times 10 = 20$ et $2n^2 = 2\times 10^2 = 200$ d'où $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 200 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ce qui est vérifié avec la calculatrice

EXERCICE 9 :



1) Soit *x* le poids d'un rond , *y* celui d'un carré
et *z* d'un triangle , on obtient le système suivant :

$\begin{cases} x+y=z \\ x+z=y+0,5 \\ 4x+2z=3y+0,25 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=0,5 \\ 4x-3y+2z=0,25 \end{cases}$

soit les matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,25 \end{pmatrix}$

On peut écrire le système sous la forme *AX=B*

Comme $AX = B$ alors $A^{-1}AX = A^{-1}B$ d'où $X = A^{-1}B$

On obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0,5 & 3,5 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 1,25 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ donc $S = \{(0,25;1,25;1,5)\}$ donc

le poids d'un rond est 0,5 kg , celui d'un carré est 1,25 kg et celui d'un triangle est 1,5 kg.

2) On pouvait facilement trouver des pesées plus simples :

<u>première pesée</u> : le rond car on possède un poids de 0,25 kg

<u>deuxième pesée</u> : le triangle car on possède 2 poids de 0,25 kg et 3 objets ronds

<u>troisième pesée</u> : le carré car on possède 1 poids de 0,25 kg et 1 objet triangle

---

EXERCICE 10 :

Résoudre, si possible, les systèmes suivants en utilisant des matrices et en indiquant la méthode utilisée.

1) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+4y+z=-2 \\ x-6y+2z=-2 \end{cases}$ on pose $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Comme $AX = B$ alors $A^{-1}AX = A^{-1}B$ d'où $X = A^{-1}B$

On obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/4 & 5/4 & 1/4 \\ 3/8 & -1/8 & -1/8 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $S = \{(-3;0,5;2)\}$

2) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+4y+z=-2 \\ x-6y+2z=-4 \end{cases}$ on pose $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Comme $AX = B$ alors $A^{-1}AX = A^{-1}B$ d'où $X = A^{-1}B$

On obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/4 & 5/4 & 1/4 \\ 3/8 & -1/8 & -1/8 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 1,25 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ donc $S = \{(-3,5;0,75;2)\}$

EXERCICE 11 :

$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{pmatrix}$; Déterminer a , b , c , d , e et f sachant que $A\times B=\begin{pmatrix}7&-7\\5&-5\\-2&2\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c+2e&b+d+2f\\c+2e&b+2d\\-c+e&-d+f\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{pmatrix}\begin{cases}a+c+2e=7\\b+d+2f=-7\\c+2e=5\\b+2d=-5\\-c+e=-2\\-d+f=2\end{cases};\begin{cases}a+c=5\\b+d+2f=-7\\c=3\\b+2d=-5\\-c=-3\\-d+f=2\end{cases};\begin{cases}a=2\\b+d+2f=-7\\c=3\\b+2d=-5\\c=3\\-d+f=2\end{cases}$$

(3)+(5) donne $3e = 3$ donc $\boldsymbol{e = 1}$ et donc $\boldsymbol{c = 3}$ et $\boldsymbol{a = 2}$

il reste le système $\begin{cases}b+d+2f=-7\\b+2d=-5\\-d+f=2\end{cases}$ on pose $M=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}b\\d\\f\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-7\\-5\\2\end{pmatrix}$

on a ; $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-2\\-3\\-1\end{pmatrix}$ d'où $\boldsymbol{b = -2}$ et donc $\boldsymbol{d = -3}$ et $\boldsymbol{f = -1}$ et donc $B=\begin{pmatrix}2&-2\\3&-3\\1&-1\end{pmatrix}$