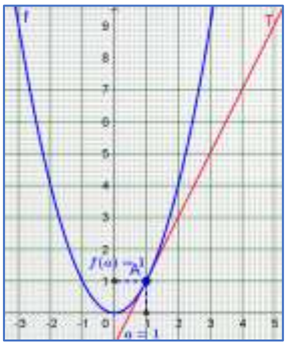
FONCTION DERIVEE. APPLICATIONS

1. Fonction dérivée

a. Définition



fichier interactif : cliquer sur l'image

Définition 1 : soit I un **intervalle, f** une **fonction définie sur I**.

Dire que **f est dérivable sur I** signifie que **f est dérivable pour tout réel a de I**.

La **fonction dérivée f' de f** est alors la fonction qui, **à tout réel x de I**, associe son **nombre dérivé $f'(x)$**.

Exemple : soit $f : x \mapsto x^2$. Pour tout a réel, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 2a$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(a)=2a$, donc $f' : x \mapsto 2x$.

*Interprétation graphique : soit (C) la courbe d'équation y=f(x). Dire que **f dérivable sur I** signifie que **(C) admet une tangente non verticale** en tout point M(x,f(x)) tel que $x \in I$.*

b. Calcul de fonctions dérivées

Fonction usuelles

Fonction f	Ensemble de dérivabilité	Fonction dérivée f'
$x \mapsto \lambda$ (constante)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{R}^*)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n} (n \in \mathbb{R}^*)$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$x \mapsto \dfrac{-n}{x^{n+1}}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$]0 \, , +\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Opérations sur les fonctions dérivables
(u et v sont deux fonctions dérivables sur I)

Fonction f	f est dérivable pour	Fonction dérivée f'
$u + v$	tout x de I	$u' + v'$
$\dfrac{1}{v}$	tout x de I tel que $v(x) \neq 0$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$	tout x de I tel que $v(x) \neq 0$	$\dfrac{v.u' - u.v'}{v^2}$

2. Fonction dérivée et sens de variation d'une fonction

Théorème 1 : soit **f une fonction dérivable sur un intervalle I**.

- Si, **pour tout x de I**, on a **$f'(x) \leq 0$**, alors **f est décroissante sur I**
- Si, **pour tout x de I**, on a **$f'(x) \geq 0$**, alors **f est croissante sur I**
- Si, **pour tout x de I**, on a **$f'(x) = 0$**, alors **f est constante sur I**

Théorème 2 (réciproque) : soit **f une fonction dérivable sur un intervalle I**.

- Si **f est décroissante sur I**, alors, **pour tout x de I**, on a **$f'(x) \leq 0$**
- Si **f est croissante sur I**, alors, **pour tout x de I**, on a **$f'(x) \geq 0$**
- Si **f est constante sur I**, alors, **pour tout x de I**, on a **$f'(x) = 0$**

☠ ***ATTENTION !***

- ***Ne pas confondre « signe » et « variation » d'une fonction…***
- ***Ne pas confondre f avec f '…***

3. Fonction dérivée et extremum local d'une fonction

Définition 2 : soit I un **intervalle, f une fonction définie sur I, x_0 un réel de I.** Dire que $f(x_0)$ est un **maximum** *(respectivement un **minimum**)* **local de f** signifie qu'il existe un **intervalle ouvert J, inclus dans I** et **contenant x_0**, tel que, **pour tout x de J**, on a **$f(x) \leq f(x_0)$** *(respectivement **$f(x) \geq f(x_0)$**)*. Dire que $f(x_0)$ est un **extremum local** de f signifie que $f(x_0)$ est un **maximum** ou un **minimum local** de f.

Théorème 3 : soit **f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, x_0 un réel de I.**
Si **$f(x_0)$** est un **extremum local** de f, alors on a **$f'(x_0) = 0$**.

Théorème 4 (problème réciproque) : soit **f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, x_0 un réel de I.**
Si **$f'(x_0) = 0$** et **f' change de signe en x_0**, alors **$f(x_0)$** est un **extremum local** de f,

☠ ***ATTENTION : deux conditions sont requises : la condition « f' change de signe en x_0 » est essentielle pour justifier l'existence d'un extremum...***

Interprétation graphique : soit (C) la courbe d'équation $y=f(x)$.

- *Dire que **$f'(x_0) = 0$** signifie que **(C) admet une tangente horizontale** en $M_0(x_0\,;\,f(x_0))$.*
- *Dire que **$f'(x_0) = 0$** et **f' change de signe en x_0** signifie que **(C) admet une tangente horizontale** en $M_0(x_0, f(x_0))$ et que cette tangente « ne traverse pas la courbe ».*

Exemples des différents cas rencontrés, avec f dérivable sur $[a,b]$, et x_0 un réel de I intervalle ouvert inclus dans $[a,b]$

$f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0

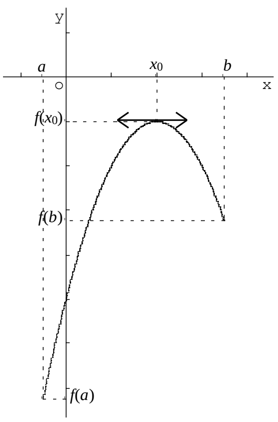
x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	0	−
f	$f(a)$ ↗	$f(x_0)$	↘ $f(b)$

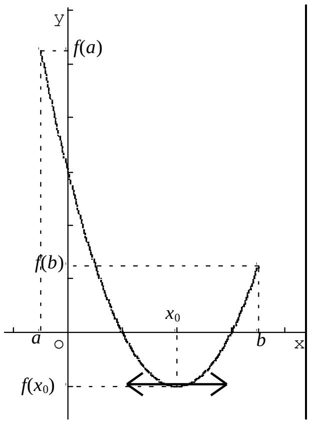
x	a	x_0	b
$f'(x)$	−	0	+
f	$f(a)$ ↘	$f(x_0)$	↗ $f(b)$

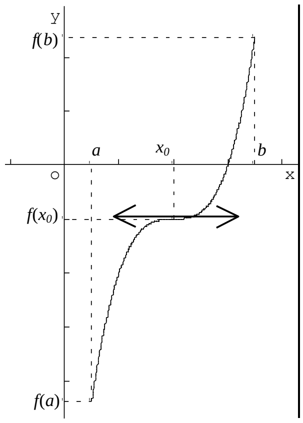
$f'(x_0) = 0$ et f' ne change pas de signe en x_0

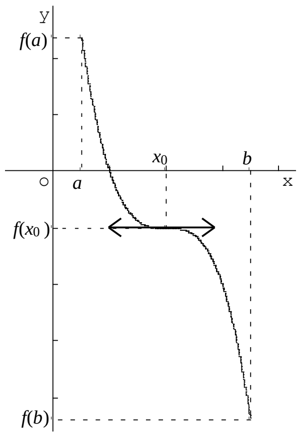
x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	0	+
f	$f(a)$ ↗	$f(x_0)$	↗ $f(b)$

x	a	x_0	b
$f'(x)$	−	0	−
f	$f(a)$ ↘	$f(x_0)$	↘ $f(b)$









Remarque : prendre l'habitude de tracer systématiquement les tangentes horizontales à une courbe (double flèche).

Autre cours et exercices corrigés sur l'excellent site [xmaths (pages 5 à 11)]