EX1 : Un théâtre propose deux types d'abonnement pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles. On considèrent un groupe de 2 500 personnes qui s'abonnent tous les ans. n étant un entier naturel, on note :

- a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année n ;
- b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année n ;
- P_n la matrice $(a_n;b_n)$ traduisant l'état probabiliste à l'année n.

Tous les ans, 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

1) On suppose que, l'année zéro, 1 500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1 000 l'abonnement B. Déterminer l'état initial $P_0(a_0;b_0)$

2) a. Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
   b. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
   c. En déduire le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année un.

3) Soit $P = (x, y)$ l'état stable, où x et y sont deux nombres réels positifs tels que $x + y = 1$.
   a. Justifier que x et y vérifient l'équation $0{,}15x - 0{,}45x = 0$
   b. Déterminer x et y.
   c. En déduire la limite de la suite (a_n) quand n tend vers $+\infty$.
   d. Interpréter le résultat précédent en terme de nombre d'abonnements de type A.

.

EX 2 : Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :
Etant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1 ;
Etant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ;
Etant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8 .

1. Tracer un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrire la matrice de transition.
2. Calculer l'état de la probabilité de l'individu au bout de trois mois, de six mois, d'un an pour chacune des situation suivantes :

a) Au départ, il est immunisé. b) Au départ, il est non malade et non immunisé. c) Au départ, il est malade.

EX 3 : Une grande entreprise propose à ses employés deux types d'horaires mensuels, fixes ou variables. Chaque trimestre, tous les employés sont consultés sur le type d'horaire qu'ils désirent adopter au trimestre suivant. Au début de l'expérience, 60% des employés sont favorables aux horaires fixes.
On estime qu'un employé préfèrant les horaires fixes un trimestre donné garde sept fois sur dix le même avis au trimestre suivant, alors qu'un employé préfèrant les horaires variables change d'avis une fois sur cinq au trimestre suivant.
On suppose que les effets des changements de personnel dans l'entreprise sont négligeables.

1) Traduire cette situation `a l'aide d'un graphe probabiliste.

2 a) Donner l'état probabiliste deux trimestres après le début de l'expérience et interpréter le résultat obtenu.
   b) Déterminer, en le justifiant, l'état probabiliste stable et l'interpréter.

<u>EX4</u> : On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ».
Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,
• 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
• 10% des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.
On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs.

On désigne par : • f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n,

- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n, (*n* est un entier naturel.)

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs, donc $f_0 = g_0 = 0,5$

1) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste et donner la matrice de transition.

2) Exprimer f_{n+1} et g_{n+1} en fonction de f_n et de g_n

3) Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.

4) Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.

5) Montrer que : pour tout entier naturel *n*, $f_{n+1} = 0,5 f_n + 0,1$

6) On pose, pour tout entier naturel *n*, $u_n = f_n - 0,2$

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de *n*.

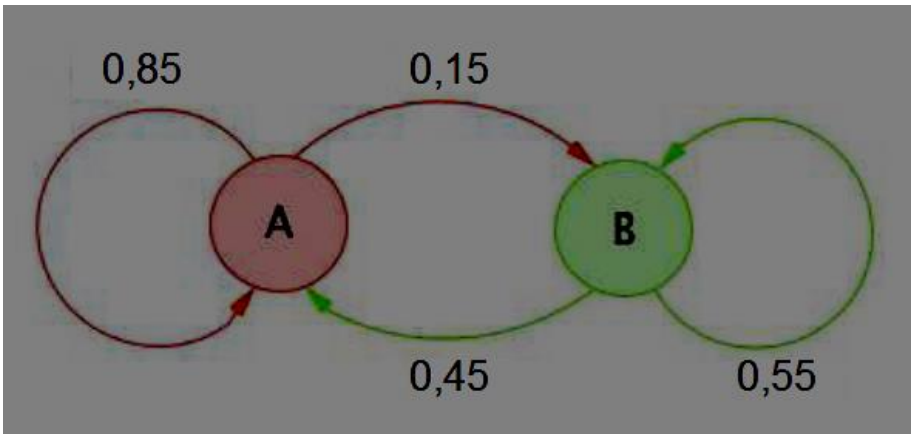
c) En déduire que, pour tout entier naturel *n*,. $f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$

d) Déterminer la limite de la suite (f_n) lorsque *n* tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

EX1 :

1) $a_0 = \frac{1500}{2500} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0,6$ et $b_0 = \frac{1000}{2500} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0,4$ donc $P_0(0,6\ ;\ 0,4)$

2) a Graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.



b) La matrice de transition M de ce graphe : $M = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,45 & 0,55 \end{bmatrix}$

c) on a l'égalité : $P_1 = P_0 M$ d'où $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,45 & 0,55 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,45 & 0,55 \end{bmatrix}$ d'où

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6\times 0,85 + 0,4\times 0,45 & 0,6\times 0,15 + 0,4\times 0,55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,51+0,18 & 0,09+0,22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,69 & 0,31 \end{pmatrix}$$

donc l'année un, il ya $0,69\times 2500 = 1725$ abonnés pour A et il ya $0,31\times 2500 = 775$ abonnés pour B.

3) Soit $P = (x\ ,y)$ l'état stable, où x et y sont deux nombres réels positifs tels que $x + y = 1$.

a) on a la relation $P = PM$ d'où $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,45 & 0,55 \end{bmatrix}$ ce qui donne le système $\begin{cases} x = 0,85x + 0,45y \\ y = 0,15x + 0,55y \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 0,85x - 0,45y = 0 \\ -0,15x + y - 0,55y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,15x - 0,45y = 0 \\ -0,15x + 0,45y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0,15x - 0,45y = 0$$

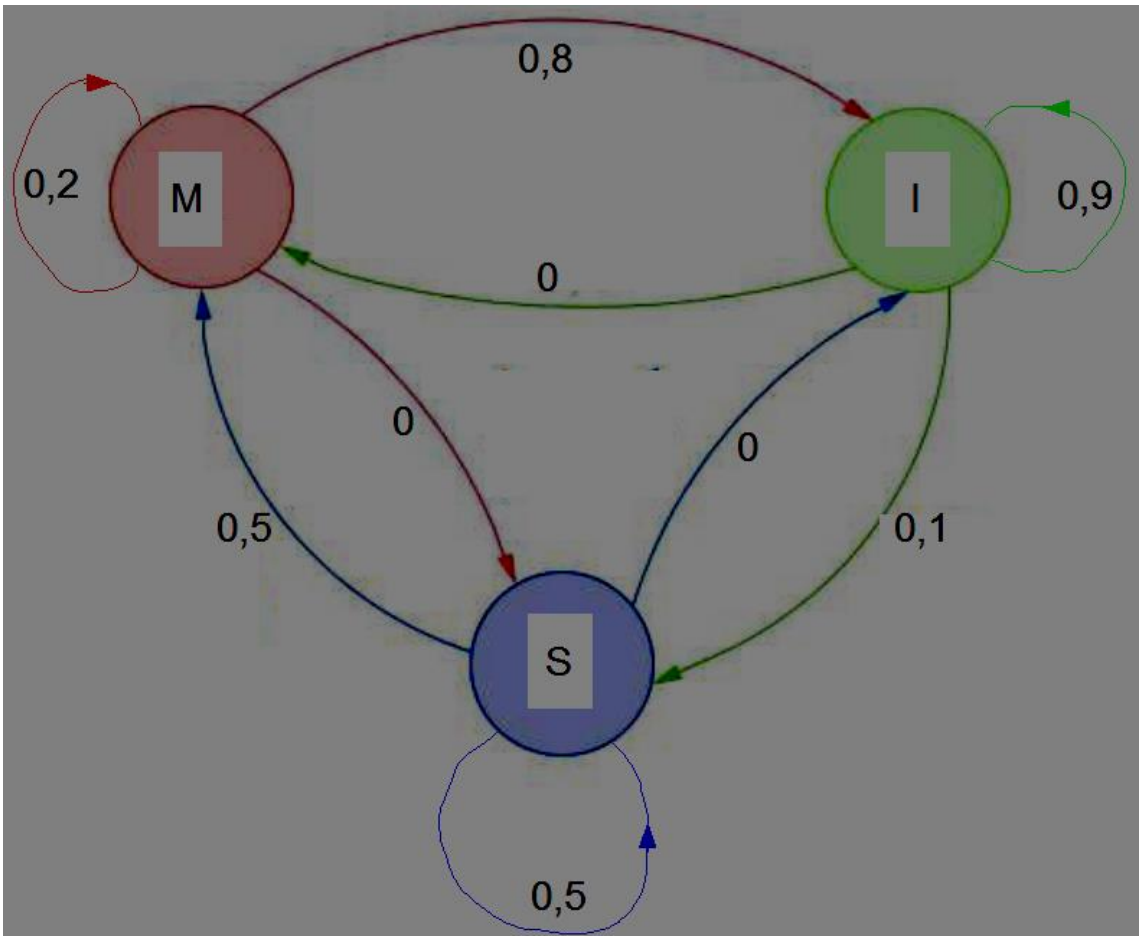
b) On résout le système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 0,15x - 0,45y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 0,15x - 0,45(1-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 0,15x - 0,45 + 0,45x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 0,6x = 0,45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 0,75 \\ x = 0,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,25 \\ x = 0,75 \end{cases}$$

c) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n) = 0,75$

d) au bout d'un certain nombre d'années, il y aura $0,75 \times 2500 = 1875$ abonnés pour A et il ya $0,25 \times 2500 = 625$ abonnés pour B.

EX 2 : 1) Graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrire la matrice de transition.



l'état initial est : $P_0\left(i_0\ ;\ m_0\ ;\ s_0\right)$ et la matrice est $T=\begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}$

2) a) Au départ, il est immunisé

donc $P_0\left(1\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$

au bout de 3 mois

$P_3=P_0\times T^3=\left(0,889\ ;\ 0\ ;\ 0,111\right)$

au bout de 6 mois

$P_6=P_0\times T^6=\left(0,888889\ ;\ 0\ ;\ 0,111111\right)$

au bout d'un an

$P_{12}=P_0\times T^{12}=\left(0,888..\ ;\ 0\ ;\ 0,111..\right)$

b) non malade et non immunisé

donc $P_0\left(0\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$

au bout de 3 mois

$P_3=P_0\times T^3=\left(0,64\ ;\ 0,125\ ;\ 0,235\right)$

au bout de 6 mois

$P_6=P_0\times T^6=\left(0,857\ ;\ 0,156\ ;\ 0,127\right)$

au bout d'un an

$P_{12}=P_0\times T^{12}=\left(0,888\ ;\ 0,0002\ ;\ 0,111\right)$

c) Au départ, il est malade.

donc $P_0\left(0\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$

au bout de 3 mois

$P_3=P_0\times T^3=\left(0,888\ ;\ 0\ ;\ 0,112\right)$

au bout de 6 mois

$P_6=P_0\times T^6=\left(0,888889\ ;\ 0\ ;\ 0,111111\right)$

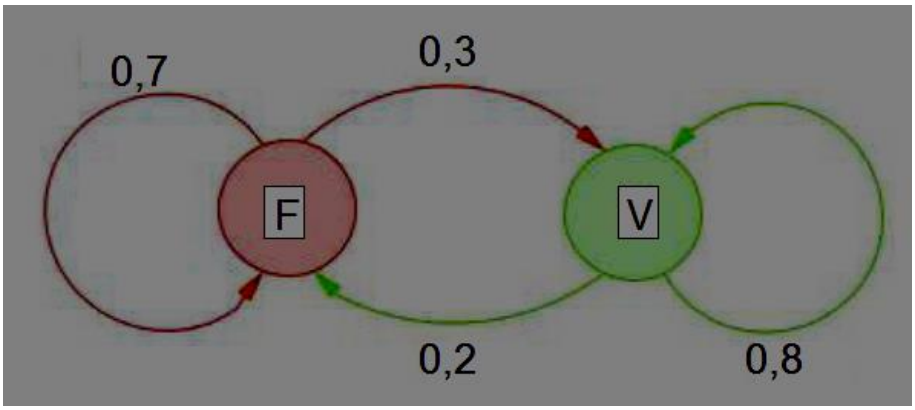
au bout d'un an

$P_{12}=P_0\times T^{12}=\left(0,888..\ ;\ 0\ ;\ 0,111..\right)$

Il semble que quelque soit l'état initial de la personne on tend vers un état stable $P\left(\frac{8}{9}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{9}\right)$

EX 3 :

1) Traduire cette situation `a l'aide d'un graphe probabiliste.



2 a) $P_0(0,6\ ;\ 0,4)$ et la matrice de transition M de ce graphe : $M = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$

deux trimestres après le début de l'expérience on a

$$P_2 = P_0 M^2 \quad \text{d'où} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$$

donc au bout de 6 mois 45% choisissent les horaires fixes et 55% choisissent les horaires variables.

b) pour déterminer l'état probabiliste stable noté $P_0(x\ ;\ y)$ on doit vérifier

$$P = PM \quad \text{d'où} \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$$; ce qui donne le système $\begin{cases} x = 0,7x + 0,2y \\ y = 0,3x + 0,8y \end{cases}$;

$$\begin{cases} x - 0,7x - 0,2y = 0 \\ -0,3x + y - 0,8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3x - 0,2y = 0 \\ -0,3x + 0,2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0,3x - 0,2y = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y = 0$$

; On résout donc :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 3x - 2(1 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 3x - 2 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 5x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 0,4 \\ x = 0,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,6 \\ x = 0,4 \end{cases}$$

ce système converge vers l'état $P_0(0,4\ ;\ 0,6)$

<u>interprétation</u> : A long terme 40% choisissent les horaires fixes et 60% choisissent les horaires variables.

Ex 4 : à vous de chercher, en vous inspirant du dernier exercice corrigé en classe !