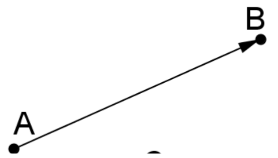
VECTEURS EN SECONDE

1. Notion de vecteur

Définition : Soient A et B deux points du plan. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est défini par :

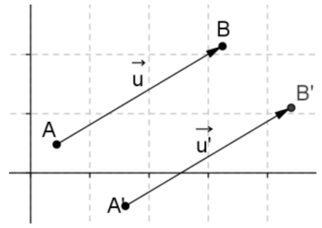
sans coordonnées	avec coordonnées
• sa direction : celle de la droite (AB) • son sens : de A vers B • sa longueur : c'est AB	soient $A(x_A\,;\,y_A)$, $B(x_B\,;\,y_B)$, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$



2. Egalité de deux vecteurs

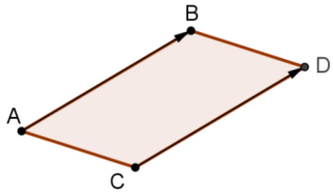
Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ deux vecteurs. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ sont égaux (notation $\vec{u} = \vec{u}\,'$) signifie :

sans coordonnées	avec coordonnées
soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}\,' = \overrightarrow{A'B'}$: ces 2 vecteurs ont • même direction : $(AB)//(A'B')$ • même sens • même longueur : $AB = A'B'$	soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\,'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$



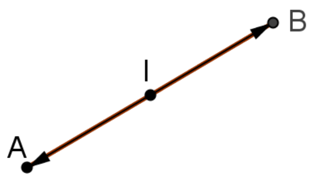
Théorème 2 : Soient A, B, C, D quatre points du plan :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est équivalent à : $ABDC$ est un parallélogramme



Cas particulier : Soient A, B, I trois points du plan :

I est le milieu de $[AB]$ est équivalent à : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$



🕭 : **<u>ATTENTION</u> : ne pas confondre $ABDC$ et $ABCD$!**

3. Vecteur nul

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur. $\vec{u}$ est le vecteur nul (notation $\vec{u} = \vec{0}$) signifie :

sans coordonnées	avec coordonnées
soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on a $A = B$	soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

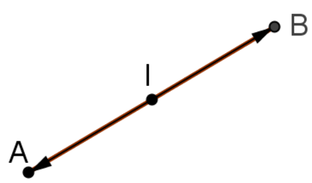
4. Vecteur opposé

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur. L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur (notation $-\vec{u}$) défini par :

sans coordonnées	avec coordonnées
soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on a $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$	soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a $-\vec{u}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

Théorème 3 : Soient A, B, I trois points du plan :

I est le milieu de $[AB]$ est équivalent à : $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$



5. Produit d'un vecteur par un réel

a. Définition : Soient $\vec{u}$ un vecteur et k un réel.

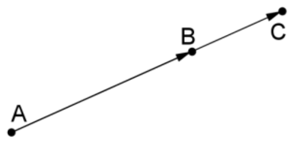
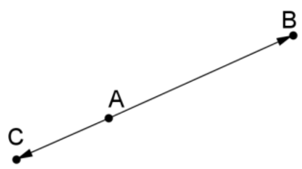
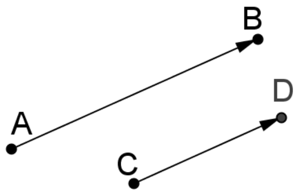
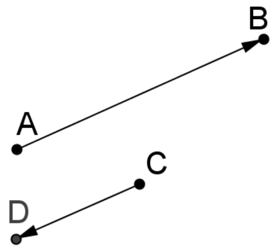
sans coordonnées

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, soient A et B deux points du plan distincts tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; on définit le vecteur $k\vec{u} = k\overrightarrow{AB}$ par
  - ◊ $k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la **même direction**
  - ◊ Si $\boldsymbol{k > 0}$, $k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de **même sens**
    Si $\boldsymbol{k < 0}$, $k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de **sens contraire**
  - ◊ Si $\boldsymbol{k \geq 0}$, $k\overrightarrow{AB}$ a pour longueur $k.AB$
    Si $\boldsymbol{k \leq 0}$, $k\overrightarrow{AB}$ a pour longueur $-k.AB$

avec coordonnées

soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Configurations associées :

$\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$		$\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$	
$k > 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k < 0$
			

b. Règles de calcul

Théorème 4 : Soit $\vec{u}$ un vecteur, a et b deux réels. On a :

- $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$
- $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$

Conséquence : les méthodes de calcul avec des produits de vecteurs par des réels seront « analogues » à celles que l'on utilise lorsqu'on fait des calculs avec des réels seuls.

c. Colinéarité de deux vecteurs

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie

sans coordonnées

l'un des deux cas suivants :

- l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

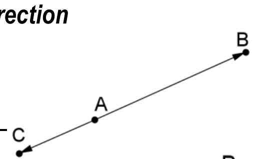
avec coordonnées

soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\,'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

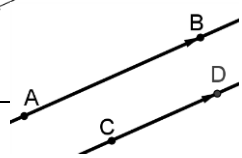
les cordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont proportionnelles, c'est-à dire $xy' = x'y$.

Remarque : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** *signifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la* ***même direction***

Propriété 1 : Soient A, B, C trois points distincts :
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires** équivaut à $\boldsymbol{A, B, C}$ **sont alignés**.

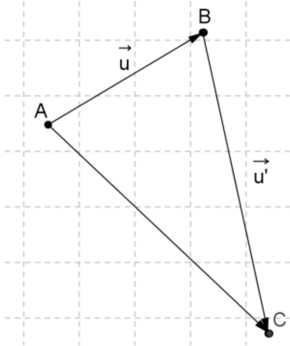


Propriété 2 : Soient A, B, C, D quatre points distincts :
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires** équivaut à $\boldsymbol{(AB)}$ **et** $\boldsymbol{(CD)}$ **sont parallèles**.



Conséquence : ABCD (mais aussi ABDC) est alors un trapèze.

6. Somme de deux vecteurs



Définition 1

sans coordonnées

(relation de Chasles pour la somme) :

Soient A, B, C trois points du plan, tels que

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}' = \overrightarrow{BC}$.

on a $\vec{u} + \vec{u}' = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

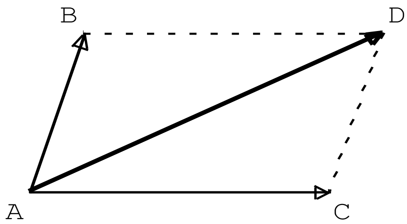
avec coordonnées

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

on a $\vec{u} + \vec{u}'\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

*Remarque 1 : **B** est un « **point pivot** » situé **de part et d'autre du symbole** +*

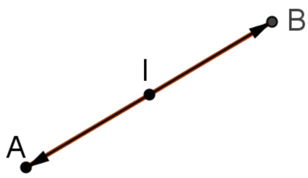
Remarque 2 : On a aussi $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$



Propriété 1 : Soient A, B, C, D quatre points du plan distincts.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow$ **$ABDC$ est un parallélogramme**.

🔔 : **<u>ATTENTION</u> : ne pas confondre $ABDC$ et $ABCD$!**

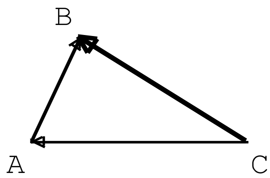


Propriété 2 : Soient A, B, I trois points du plan.

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow$ **I est le milieu de $[AB]$**.

Propriété 3 : Soient A et B deux points du plan.

On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$



Définition 3 (***différence de deux vecteurs***) : Soient A, B, C, D quatre points du plan.

Par définition, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

Propriété 5 ***(relation de Chasles pour la différence)*** : Soient A, B, C trois points du plan.

On a $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

*Remarque 1: **A** est un « **point pivot** » situé **à l'origine de chaque vecteur**.*

Remarque 2 : On a aussi $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$ *(**A** est un « **point pivot** » situé **à l'extrémité de chaque vecteur**)*

🔔 : **<u>ATTENTION</u> ! la relation de Chasles est très pratique, mais elle doit être employée en prenant bien garde à la position du « point pivot ». Par exemple,** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BC}$, ou $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} \neq \overrightarrow{CB}$, etc...

<u>Règles de calcul</u>

Théorème 5 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, a et b deux réels. On a :

- $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
- $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

Conséquence : les méthodes de calcul avec des sommes et produits de vecteurs seront « analogues » à celles que l'on utilise lorsqu'on fait des calculs avec des réels.